

Subiectul 1

Găsiți rangul submodulului S al lui $\mathbb{Z}^2$ generat de $(8, 4), (2, 6), (-4, 10)$. Determinați modulul factor $\mathbb{Z}^2/S$.

Subiectul 2

a) Decideți dacă $\mathbb{Z}$ -modulelele $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{12}$ și $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_3$ sînt izomorfe. Justificați.

b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încît $x \equiv 1 \pmod{9}$ și $x \equiv 2 \pmod{11}$.

Subiectul 3

a) Fie R un inel și A, B două R -module libere de rang finit. Demonstrați că $A \times B$ este liber, de rang egal cu rang A + rang B . b) Demonstrați că $\mathbb{Z}$ -modulul $\mathbb{Q}$ nu e liber.

Subiectul 4

Fie R un inel comutativ. Pentru R -modulele A, B , notăm cu $\text{Hom}_R(A, B)$ mulțimea

$$\{f : A \rightarrow B \mid f \text{ este morfism de } R\text{-module}\}.$$

a) Demonstrați că $\text{Hom}_R(A, B)$ are structură de R -modul. b) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că: $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ și $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$.

Subiectul 5

a) Determinați toate (pînă la izomorfism) grupurile abeliene cu 100 de elemente. b) Dați exemplu de $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că există exact 3 grupuri abeliene cu n elemente (pînă la izomorfism).